

Feuille 3 - Équations différentielles ordinaires

Exercice 1

Soient I, U deux ouverts de $\mathbb{R}$ et soit $F : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Montrer que F est localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable.

Exercice 2

Résoudre les EDOs suivantes :

1. Trouver la solution de $y' + 2y = \cos(t)$ satisfaisant $y(\pi) = 1$.
2. Trouver la solution de $y' - \frac{y}{t^2} = \frac{e^{-1/t}}{t^2 - 1}$ satisfaisant $y(2) = 1$.

Exercice 3

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t). \end{cases}$$

Exercice 4

Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t), \\ y'(t) = x(t) + 3y(t), \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 5

Résoudre les équations différentielles non-linéaires suivantes :

1. $y' = y^2$;
2. $y' = y(1 - y)$.

Exercice 6

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3y^{2/3}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction $y \mapsto y^{2/3}$ n'est pas localement Lipschitzienne.
2. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de ce problème de Cauchy. Posons

$$\lambda := \inf\{t \leq 0; \varphi(t) = 0\} \quad \text{et} \quad \mu := \sup\{t \geq 0; \varphi(t) = 0\}.$$

Montrer que φ est identiquement nulle sur $]\lambda, \mu[$.

3. Montrer que pour tous $\lambda \leq 0 \leq \mu$ il existe une solution $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vaut 0 sur $[\lambda, \mu]$ et qui est non-nulle sur $\mathbb{R} \setminus [\lambda, \mu]$.

Exercice 7

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant -1 et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2ty + y^2, \\ y(-1) = y_0. \end{cases}$$

Montrer que, si $y_0 > 2$, alors f est strictement croissante sur $I \cap [-1, +\infty[$.

Exercice 8

On considère l'équation différentielle $y'(t) = |y(t)| + |t|$. Déterminer une solution maximale vérifiant $y(0) = 1$ et montrer qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$. Combien de fois est-elle dérivable ? *Indication* : Distinguer les cas $t < 0$ et $t \geq 0$.

Exercice 9

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons qu'il existe $t_0 \in I$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \geq 0$ tels que pour tout $t \in I$ avec $t \geq t_0$ on a

$$f(t) \leq a + b \int_{t_0}^t f(s) ds. \quad (7.1)$$

1. Trouver la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait à l'égalité dans (7.1).
2. Posons $F(t) = \int_{t_0}^t f(s) ds$. Montrer que $F'(t) - bF(t) \leq a$ pour tout $t \geq t_0$, $t \in I$.
3. Montrer que $F(t) \leq \frac{a}{b}(e^{b(t-t_0)} - 1)$ pour tout $t \geq t_0$, $t \in I$.
Indication : Multiplier l'inégalité ci-dessus par $e^{-b(t-t_0)}$ et intégrer.
4. Conclure que $f(t) \leq ae^{b(t-t_0)}$ pour tout $t \geq t_0$, $t \in I$.