

Feuille 4 - Espace métriques

Exercice 1

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour tous $x, y \in E$, on pose $d(x, y) = \|x - y\|$.

1. Montrer que (E, d) est un espace métrique.
2. Exprimer les ouverts de l'espace métrique (E, d) . Que retrouve-t-on ?

Exercice 2

Soit X un ensemble non vide et définissons une fonction $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

1. Montrer que d est une distance sur X .
2. Décrire les boules $B_r(x)$ pour $x \in X$ en fonction de r .
3. Donner tous les ouverts et fermés de X par rapport à d .

Exercice 3

Soit (X, d) un espace métrique, soit $\{E_j\}_{j \in J}$ une famille de parties de X . Vrai ou faux ? Justifier.

1. Si tous les E_j sont des ouverts de X , alors $\bigcup_{j \in J} E_j$ est un ouvert de X .
2. Si tous les E_j sont des fermés de X , alors $E_{j_1} \cup \dots \cup E_{j_n}$ est un fermé de X pour tout choix $j_1, \dots, j_n \in J$.
3. Si tous les E_j sont des fermés de X , alors $\bigcap_{j \in J} E_j$ est un fermé de X .

Exercice 4

Donner un exemple d'un espace métrique (X, d) et d'une famille $\{E_j\}_{j \in J}$ de parties ouvertes (resp. fermées) de X telle que $\bigcap_{j \in J} E_j$ (resp. $\bigcup_{j \in J} E_j$) n'est pas un ouvert (resp. un fermé) de X .

Exercice 5

Soit (X, d) un espace métrique et soit (x_k) une suite convergente dans X .

1. Montrer que la limite de (x_k) est unique.
2. Montrer que (x_k) est bornée dans X .
3. Donner un exemple d'une suite bornée qui ne converge pas.

Exercice 6

Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $A \subset X$. Montrer que (A, d_A) , où d_A est la distance induite par d , est un espace métrique complet si et seulement si A est un fermé de X .

Exercice 7

Soit $f : I = [\frac{2}{3}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{2x+6}{3x+2}.$$

1. Montrer que I est un espace métrique complet et que $f(I) \subset I$.
2. Montrer que f est contractante et calculer l'unique point fixe de f .
3. On prolonge f à $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x+6}{3x+2}$. Montrer que f n'est pas contractante mais possède deux points fixes.

Exercice 8

Soit (X, d) un espace métrique. Pour toute partie $Y \subset X$ non vide et chaque $x \in X$, nous définissons la distance entre x et Y par

$$d(x, Y) := \inf\{d(x, y); y \in Y\}.$$

Montrer que $d(x, Y) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{Y}$.

Exercice 9

Soit (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X . Soit $\bar{x} \in X$. On suppose que de toute sous-suite de $(x_n)_n$, on peut extraire une sous-suite qui converge vers $\bar{x}$. Montrer que $(x_n)_n$ converge vers $\bar{x}$.

Exercice 10

Soit (X, d) un espace métrique. Pour toute suite d'éléments de X , $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, on note

$$L((u_n)_n) := \{l \in X, \exists \text{ une sous-suite } (u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}, \lim_{k \rightarrow +\infty} u_{n_k} = l\} \subset X.$$

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ et $A(u) := \{u_n \in X, n \in \mathbb{N}\} \subset X$.

1. On suppose que la suite u converge vers une limite $l \in X$. Montrer que $L(u) = \{l\}$.
2. Dans le cas particulier où $X = \mathbb{R}$, on considère la suite $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_{2n+1} = 0$ et $v_{2n} = 2n$.
 - (a) Montrer que v n'est pas convergente.
 - (b) Montrer que $L(v)$ est un singleton.
3. Donner un exemple de suite $w \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $L(w)$ soit la réunion de deux singletons distincts.
4. Montrer que $A(u) \cup L(u) \subset \overline{A(u)}$.
5. Montrer qu'en fait $A(u) \cup L(u) = \overline{A(u)}$.
6. Soit $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $L(u)$.
 - (a) Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$d(u_{k_n}, l_n) < \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1.$$

- (b) On suppose que la suite l_n converge vers $l \in X$. Montrer que la suite $(u_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l .
 - (c) Que peut-on en conclure sur l'ensemble $L(u)$?