
Feuille 1 - Rappels sur la topologie de $\mathbb{R}^n$

Exercice 1

Tracer la boule unité de $\mathbb{R}^2$ par rapport à chacune des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$. Montrer également que ces trois normes sont équivalentes.

Exercice 2

Pour chacun des ensembles suivants déterminer s'il est ouvert ou fermé et trouver son adhérence et son intérieur. Faire des dessins si possible !

1. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y^2\} \subset \mathbb{R}^2$;
2. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$;
3. $E = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;
4. $E = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A^2 = -I_2\} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Exercice 3

Déterminer toutes les normes sur $E = \mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $L : E \rightarrow F$ une application linéaire. Montrer que l'on a l'équivalence suivante :

- (i). L est continue
- (ii). L est continue en 0
- (iii). Il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|Lx\|_F \leq C\|x\|_E$

Exercice 5

Soit $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$, $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ trois espaces vectoriels normés. Soit $L : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ une application bilinéaire. Montrer que l'on a l'équivalence suivante :

- (i). L est continue
- (ii). L est continue en $0 = (0, 0)$
- (iii). Il existe $C > 0$ tel que pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, $\|L(x_1, x_2)\|_F \leq C\|x_1\|_{E_1}\|x_2\|_{E_2}$.

Exercice 6

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que toute application linéaire $L : E \rightarrow F$ est continue.

Exercice 7

Soit E un espace vectoriel. Montrer que les deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E sont équivalentes si et seulement si $\text{Id}_E : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_2)$ est un homéomorphisme.

Exercice 8

Montrer que les deux normes $\|\cdot\|_{[0,1]}$ et $\|\cdot\|_1$ sur $E = \mathcal{C}([0,1])$ ne sont pas équivalentes.

Indication : Trouver une suite (f_k) dans E telle que $\|f_k\|_1 \rightarrow 0$ mais $\|f_k\|_{[0,1]} \not\rightarrow 0$.

Exercice 9

Sur $\mathcal{C}^1([0,1])$ on considère les deux normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_{\infty,1} := \|\cdot\|_\infty + \|\cdot'\|_\infty$. Sont-elles équivalentes.

Exercice 10

Soit B l'ensemble des suites réelles bornées et F l'ensemble des suites réelles dont la série est absolument convergente. On définit de plus

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \quad \forall u \in B, \quad \|v\|_\Sigma = \sum_{n \in \mathbb{N}} |v_n| \quad \forall v \in F.$$

1. Montrer que B et F sont des espaces vectoriels.
2. A-t-on $B \subset F$? $F \subset B$?
3. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur B .
4. Montrer que $\|\cdot\|_\Sigma$ est une norme sur F .
5. Est-ce que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_\Sigma$ sont équivalentes sur F ?

Exercice 11

On munit $E = \mathbb{K}^{n \times n}$ de la norme opérateur $\|\cdot\|_{\text{op}}$. Montrer que la multiplication matricielle $\mathbb{K}^{n \times n} \times \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$, $(A, B) \mapsto AB$, est continue.

Exercice 12

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne et on considère la norme opérateur associée sur $\mathbb{R}^{n \times n}$.

1. Déterminer $\|A\|_{\text{op}}$ d'une matrice *diagonale* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
2. Déterminer la norme opérateur de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 13

On considère $E = C([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E .

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, la suite réelle $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy.
2. En déduire qu'il existe une fonction $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.
3. Montrer que la convergence $f_n \rightarrow f$ est uniforme.
4. Montrer que f est continue.
5. Conclure que $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Exercice 14

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel de E .

Supposons que F soit fermé dans E . Montrer que $(F, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

Exercice 15

On considère $E = [0, 1]$ muni de la distance usuelle et l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \cos(x).$$

1. Vérifier que $\varphi(E) \subset E$.
2. Montrer que, pour tous $x, y \in E$,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \sin(1)|x - y|.$$

3. En déduire que φ est une contraction.
4. Justifier que $E = [0, 1]$ est complet.
5. À l'aide du théorème du point fixe de Banach, montrer que φ possède un unique point fixe dans $[0, 1]$.
6. Soit $x_0 \in E$ et

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = \cos(x_n).$$

Montrer que (x_n) converge vers l'unique solution $\alpha \in [0, 1]$ de l'équation $\cos(\alpha) = \alpha$.