Compléments d'analyse

Notes de cours, 2026

Table des matières

1 Notion de limite, relations de comparaison entre fonctions

1.1 Limite d'une suite

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs réelles. La notion de limite d'une suite a été entrevue au lycée. La définition précise suivante sera vue dans le cours d'Analyse 2 :

Définition 1.1. (a) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) a pour limite ℓ lorsque n tend vers $+\infty$, ou que (u_n) converge vers ℓ, si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

(b) On dit que (u_n) a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque n tend vers $+\infty$, ou que (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ u_n > M \quad (\text{resp. } u_n < M).$$

Exemple 1.2. (a) Voici des limites connues :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0; \qquad \lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty; \qquad \lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty; \qquad \lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0.$$

(b) La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout n n'a pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$: elle diverge sans limite.

Remarque 1.3. Dans ce qui suit, lorsqu'on écrit : « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ », cela veut dire : « la limite existe et est égale à ℓ ». Plus précisément, lorsqu'on écrit « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ », cela présuppose que la limite existe. Et pareillement pour les limites de fonctions.

1.2 Limite d'une fonction

Dans ce cours, on s'intéressera à des fonctions $f : D \to \mathbb{R}$ où D est un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles [1] de $\mathbb{R}$. Par ailleurs, on considère la droite réelle achevée : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on dira que f est *définie près de a* si a est un point de D ou une borne de (l'un des intervalles qui forment) D.

On peut alors définir la notion de limite de f en a. Voici la définition précise, qui sera vue aussi en cours d'Analyse 2 :

1. Lorsqu'on dit que f est définie sur un intervalle/une réunion d'intervalles, on sous-entend que cet intervalle/chacun de ces intervalles est non vide et non réduit à un point.

Définition 1.4. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie près de a. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

1er cas : $a = +\infty$:

(1.a) On dit que f a pour limite ℓ quand x tend vers $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ x > A \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

(1.b) On dit que f a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ x > A \ \Rightarrow\ f(x) > M \quad (\text{resp. } f(x) < M).$$

2ème cas : $a \in \mathbb{R}$:

(2.a) On dit que f a pour limite ℓ quand x tend vers a si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D,\ |x - a| < \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

(2.b) On dit que f a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand x tend vers a si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D,\ |x - a| < \alpha \ \Rightarrow\ f(x) > M \quad (\text{resp. } f(x) < M).$$

Exercice 1.5. Établir les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ à l'aide de la définition.

Exemple 1.6. (a) Des limites de référence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ i\infty & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty.$$

(b) Croissance comparée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

(c) D'autres limites connues depuis le lycée

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1.$$

Proposition 1.7 (Opérations sur les limites)**.** *On se donne deux fonctions f et g ayant comme limites ℓ et ℓ', éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :*

(a) *$f+g$ a pour limite $\ell+\ell'$ en a, sauf si ℓ et ℓ' sont $+\infty$ et $-\infty$ (forme indéterminée).*

(b) *$f \times g$ a pour limite $\ell \times \ell'$ en a, sauf si ℓ et ℓ' sont $\pm\infty$ et 0 (forme indéterminée).*

(c) *$\frac{1}{g}$ a pour limite $\frac{1}{\ell'}$ en a, sauf si $\ell' = 0$; toutefois si $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ et $g(x) > 0$ pour tout x (respectivement, $g(x) < 0$ pour tout x), alors $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = +\infty$ (resp. $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = -\infty$).*

Remarque 1.8. Pour décider de la limite de $\frac{f}{g}$ on écrit $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ et on se sert des points (b)–(c) de la proposition.

1.3 Lien entre limites des suites et limite d'une fonction

Proposition 1.9. *Soient $a, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie près de a. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.
(ii) *Pour toute suite (u_n) à valeurs dans D telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.*

La démonstration sera faite dans le cours d'Analyse 2. On n'utilisera que l'implication (i)$\Rightarrow$(ii), sous la forme du corollaire suivant :

Corollaire 1.10. *S'il existe deux suites (u_n) et (v_n) à valeurs dans D telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$, alors f n'a pas de limite en a.*

Exemple 1.11. En considérant les suites $u_n = 2n\pi$ et $v_n = 2n\pi + \pi$, on prouve que cos n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 1.12. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0.

1.4 Relations de comparaison

On dira qu'une propriété est vraie *sur un voisinage de a dans D*, ou plus simplement *au voisinage de a* (lorsque $D = \mathbb{R}$, ou bien lorsque D est clair dans le contexte) si cette propriété a lieu pour tout $x \in D$ suffisamment proche de a, c'est-à-dire :
- pour tout $x \in D$ dans un intervalle de la forme $]a-\delta; a+\delta[$ lorsque $a \in \mathbb{R}$,
- pour tout $x \in D$ dans un intervalle de la forme $]A; +\infty[$, resp. $]-\infty; A[$, lorsque $a = +\infty$, resp. $a = -\infty$.

Exemple 1.13. La fonction $\ln :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ est négative au voisinage de 0.

Définition 1.14. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies près de a.
(a) On dit que *f est négligeable devant g en a* et on note $f = o_a(g)$ si, au voisinage de a, on peut écrire $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ où ε est une fonction telle que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.
(b) On dit que *f est équivalente à g en a* et on note $f \sim_a g$ si, au voisinage de a, on peut écrire $f(x) = \eta(x)g(x)$ où η est une fonction telle que $\lim_{x\to a} \eta(x) = 1$.

On a le critère pratique suivant :

Proposition 1.15. *On suppose que la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a sauf éventuellement en a. Alors :*
(a) *$f = o_a(g)$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$;*
(b) *$f \sim_a g$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.*

Démonstration. On peut écrire $f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \times g(x)$ au voisinage de a, et dans chaque cas la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ a la limite requise en a pour qu'on puisse en déduire la relation de comparaison souhaitée. $\square$

Exemple 1.16. (a) $\sin(x) \sim_0 x$; en effet, x ne s'annule pas au voisinage de 0, sauf en 0, et on connaît la limite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

(b) $\ln(x) = o_{+\infty}(x)$, car en effet $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

(c) $\arctan(x) \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2}$; plus généralement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$ alors $f(x) \sim_a \ell$.

Remarque 1.17. La relation "être négligeable devant au voisinage de a" est une relation transitive : si $f = o_a(g)$ et $g = o_a(h)$, alors $f = o_a(h)$. La relation être "équivalent à au voisinage de a" est une relation d'équivalence (réflexive, transitive et symétrique).

Exercice* 1.18. Supposons $f = o_a(g)$ et $g = o_a(f)$. Montrer que f et g sont nulles sur un voisinage de a.

Remarque 1.19. (1) Les mêmes relations de comparaison peuvent être définies dans le cas des suites. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs réelles.

(a) On dit que (u_n) est *négligeable devant* (v_n) si, à partir d'un certain rang, on a $u_n = \varepsilon_n v_n$ où (ε_n) est une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. On note alors $u_n = o(v_n)$.

(b) On dit que (u_n) est *équivalente à* (v_n) si, à partir d'un certain rang, on a $u_n = \eta_n v_n$ où (η_n) est une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \eta_n = 1$. On note alors $u_n \sim v_n$.

(2) Comme dans le cas des fonctions, dans le cas où la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on a le critère plus simple :

(a) $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$;

(b) $u_n \sim v_n$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

(3) Par exemple, $\frac{1}{n\sqrt{n}} = o(\frac{1}{n})$, $\quad \frac{n^2+\cos(n)}{n^3-7} \sim \frac{1}{n}$.

1.5 Rappel sur la dérivabilité et notre premier DL

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle et soit $a \in I$. On dit que f est *continue* en a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (ce qui revient à dire, en fait, que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe ; cette limite est alors forcément égale à $f(a)$).

On dit que f est *dérivable* en a si la limite

$$f'(a) := \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et appartient à $\mathbb{R}$. Alors, dans un repère orthonormé du plan, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point d'abscisse a, d'équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Posons $\varphi(x) = f(x) - [f'(a)(x - a) + f(a)]$. On obtient

$$\frac{\varphi(x)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \to 0 \quad \text{si } x \to a,$$

donc $\varphi(x) = o_a(x-a)$. On peut alors écrire :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_a(x-a).$$

Cette expression, qui montre dans quelle mesure f est approximée par la fonction affine $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$, est appelée *développement limité de f en a à l'ordre* 1.

L'objet du chapitre suivant est d'étendre la notion de développement limité pour des ordres supérieurs, dans le but d'obtenir des approximations plus précises de f.

2 Développements limités

2.1 Définition et premières propriétés

2.1.1 Développement limité en un point

On considère une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie près de $a \in \mathbb{R}$.

Définition 2.1. Soit $n \geq 0$ un entier naturel.

On dit que f admet un *développement limité d'ordre n en a* (on écrit $DL_n(a)$), si il existe des coefficients réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que la fonction

$$\varphi : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) - [\, a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n \,]$$

vérifie :

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^n} = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \varphi(x) = o_a((x-a)^n).$$

Autrement dit, f admet un $DL_n(a)$ si on peut écrire

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \varphi(x)$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des réels et $\varphi(x) = o_a((x-a)^n)$.

La fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$ est appelée la *partie régulière* du développement limité.

Remarque 2.2. Si f admet un $DL_n(a)$, alors a fortiori f admet un $DL_k(a)$ pour tout ordre $k \leq n$, dont la partie régulière s'obtient en "tronquant" au degré k la partie régulière du DL_n. On peut écrire en effet

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_k(x-a)^k + \underbrace{a_{k+1}(x-a)^{k+1} + \ldots + a_n(x-a)^n + \varphi(x)}_{=o_a((x-a)^k)}.$$

Rien ne dit en revanche que f admettra un $DL_m(a)$ pour $m > n$.

Un développement limité permet d'approximer une fonction f par une fonction polynomiale (=la partie régulière du développement limité), au voisinage d'un point. Plus l'ordre est élevé, plus l'approximation sera précise.

Exemple 2.3. (a) Comme vu à la fin du chapitre précédent, si f est dérivable en a, alors f admet un $DL_1(a)$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_a((x-a)^1);$$

les coefficients de ce développement limité sont donc $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$.

D'où des exemples de $DL_1(0)$:

- $\sin(x) = \sin(0) + \sin'(0) \times x + o(x) = x + o(x)$,
- $\cos(x) = 1 + o(x)$,
- $\exp(x) = 1 + x + o(x)$.

Un exemple de $DL_1(1)$:

- $\ln(x) = \ln(1) + \ln'(1) \times (x-1) + o((x-1)) = (x-1) + o((x-1))$.

(b) Si f est une fonction polynomiale de degré $\leq n$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

alors f admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $\mathrm{Reg}_n(f;0) = f$.

Plus généralement, quel que soit $a \in \mathbb{R}$, on peut encore écrire f sous la forme

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n$$

avec d'autres coefficients $b_0, \ldots, b_n$ (car les monômes $x \mapsto (x-a)^k$, $k = 0, \ldots, n$ forment une base de l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré $\leq n$), et cette écriture indique que f admet un $DL_n(a)$ quel que soit a.

(c) Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$. Pour tout entier naturel $n \geq 0$, on connaît la formule

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

qui permet alors d'écrire

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n \frac{x}{1-x}.$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{1-x} = 0$, cette écriture montre que f admet, pour tout rang $n \geq 0$, un $DL_n(0)$ de partie régulière $\sum_{k=0}^{n} x^k$.

Exercice 2.4. (a) Montrer que, si f admet un $DL_n(a)$ de rang $n \geq 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a_0$ (le coefficient constant du développement limité).

(b) Supposons f continue en a. Montrer que, si f admet un $DL_n(a)$ avec $n \geq 1$, alors f est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a) = a_1$ (le coefficient de degré 1 du développement limité).

Cet exercice commence à suggérer que les coefficients d'un développement limité, s'il existe, sont uniquement caractérisés. Cela est dit plus précisément par la proposition suivante.

Proposition 2.5. *Si f admet un $DL_n(a)$, alors il est unique. Plus précisément, si on a deux développements limités :*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \varphi(x) = b_0 + b_1(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n + \psi(x)$$

alors $a_k = b_k$ pour tout $k = 0, 1, \ldots, n$, et $\varphi \equiv \psi$.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe $k \in \{0, \ldots, n\}$ tel que $a_k = b_k$, et notons par k_0 le plus petit k vérifiant cela. On a alors pour tout $x \in D$:

$$\begin{array}{rl} & a_0 + \ldots + a_{k_0-1}(x-a)^{k_0-1} + a_{k_0}(x-a)^{k_0} + \ldots + a_n(x-a)^n + \varphi(x) \\ = & a_0 + \ldots + a_{k_0-1}(x-a)^{k_0-1} + b_{k_0}(x-a)^{k_0} + \ldots + b_n(x-a)^n + \psi(x) \end{array}$$

donc

$$a_{k_0}(x-a)^{k_0}+\ldots+a_n(x-a)^n+(x-a)^n\phi(x) = b_{k_0}(x-a)^{k_0}+\ldots+b_n(x-a)^n+(x-a)^n\psi(x).$$

En divisant par $(x-a)^{k_0}$ on obtient pour tout $x \neq a$:

$$a_{k_0}+\ldots+a_n(x-a)^{n-k_0}+(x-a)^{n-k_0}\phi(x) = b_{k_0}+\ldots+b_n(x-a)^{n-k_0}+(x-a)^{n-k_0}\psi(x).$$

En passant à la limite lorsque $x \to a$, il suit : $a_{k_0} = b_{k_0}$, une contradiction. □

2.1.2 Cas des fonctions paires / impaires

Exemple 2.6. (a) On rappelle le $DL_1(0)$: $\sin(y) = y + \varphi(y)$ où $\varphi(y) = o(y)$.

(b) On en déduit un $DL_2(0)$ de cos : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on écrit

$$\begin{array}{rcl} \cos(x) & = & \cos\Big(2 \times \dfrac{x}{2}\Big) = 1 - 2\sin^2\Big(\dfrac{x}{2}\Big) = 1 - 2\Big[\dfrac{x}{2} + \varphi\Big(\dfrac{x}{2}\Big)\Big]^2 \\ & = & 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \Big[\underbrace{2x\varphi\Big(\dfrac{x}{2}\Big) + 2\varphi\Big(\dfrac{x}{2}\Big)^2}_{\psi(x)}\Big] = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \psi(x) \end{array}$$

où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\psi(x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0}\Big[\dfrac{\varphi(x/2)}{x/2} + \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\varphi(x/2)}{x/2}\Big)^2\Big] = 0$. On a donc obtenu un $DL_2(0)$ de cos.

Exercice 2.7. (a) Justifier les encadrements suivants :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-,\ x \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6}$$

(on pourra faire une étude de fonctions) et en déduire le $DL_2(0)$: $\sin(x) = x + o(x^2)$.

(b) En déduire le $DL_3(0)$: $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$.

(On aura besoin d'une méthode plus systématique pour trouver un $DL_n(a)$ d'une fonction donnée, pour $n \geq 2$.)

Voici une propriété vérifiée en particulier par les développements limités ci-dessus des fonctions sin et cos. Attention : elle n'est valide que pour un développement limité <u>en 0</u>.

Proposition 2.8. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble symétrique (i.e. $x \in D \Rightarrow -x \in D$) contenant 0, et on suppose que f admet un $DL_n(0)$:*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \varphi(x).$$

Si f est paire alors on a $a_k = 0$ pour tout k impair. Si f est impaire alors on a $a_k = 0$ pour tout k pair.

Démonstration. Lorsque f est paire, on écrit

$$f(x) = f(-x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \ldots + (-1)^n a_n x^n + \varphi(-x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k + \varphi(-x)$$

et on a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\varphi(-x)}{x^n} = \lim\limits_{x \to 0} (-1)^n \dfrac{\varphi(-x)}{(-x)^n} = 0$, donc la formule ci-dessus est un second $DL_n(0)$ de f. L'unicité du développement limité (Proposition 2.5) entraîne alors l'égalité $a_k = (-1)^k a_k$ pour tout entier k compris entre 0 et n, donc $a_k = 0$ pour tout tel entier impair.

Lorsque f est impaire, le raisonnement est similaire en écrivant $f(x) = -f(-x)$. □

2.1.3 Se ramener à un développement limité en 0

Pour chercher un $DL_n(a)$ d'une fonction f, il suffit de chercher un $DL_n(0)$ de la fonction $(h \mapsto f(a+h))$.

Exemple 2.9. (a) On cherche un $DL_3(2)$ de la fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. Pour cela "on pose $x = 2 + h$", autrement dit on cherche un $DL_3(0)$ de la fonction $h \mapsto \frac{1}{2+h}$. On écrit :

$$\frac{1}{2+h} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - (-\frac{h}{2})}.$$

On utilise le $DL_3(0)$ déjà vu :

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \varphi(y)$$

et on remplace y par $-\frac{h}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+h} &= \frac{1}{2}(1 + (-h/2) + (-h/2)^2 + (-h/2)^3 + \varphi(-h/2)) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{8} - \frac{h^3}{16} + \psi(h) \end{aligned}$$

où $\psi(h) = \frac{1}{2}\varphi(-h/2)$ vérifie $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\psi(h)}{h^3} = 0$. D'où finalement

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{x-2}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + \tilde{\psi}(x)$$

où $\tilde{\psi}(x) = \psi(x-2)$ vérifie $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\tilde{\psi}(x)}{(x-2)^3} = 0$.

(b) En raisonnant de même, on trouve un $DL_n(a)$ de la fonction inverse en tout point $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pour tout ordre $n \geq 0$:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a+h} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{h^k}{a^{k+1}} + \psi(h) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(x-a)^k}{a^{k+1}} + \tilde{\psi}(x)$$

où $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\psi(h)}{h^n} = \lim\limits_{x \to a} \frac{\tilde{\psi}(x)}{(x-a)^n} = 0$.

2.2 Opérations sur les développements limités

2.2.1 Combinaison linéaire

Proposition 2.10. *Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions qui admettent un $DL_n(a)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. Alors $\lambda f + g$ admet un $DL_n(a)$, dont la partie régulière s'obtient en faisant la combinaison linéaire des parties régulières des développements de f et de g.*

Démonstration. On écrit :

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n}_{\text{reg}(f):=\text{partie régulière de } f} + (x-a)^n\phi(x) \quad \text{où } \lim_{x\to a}\phi(x) = 0$$

$$g(x) = \underbrace{b_0 + b_1(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n}_{\text{reg}(g):=\text{partie régulière de } g} + (x-a)^n\psi(x) \quad \text{où } \lim_{x\to a}\psi(x) = 0$$

de sorte que :

$$\lambda f(x) + g(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n}(\lambda a_i + b_i)(x-a)^i}_{\lambda\text{reg}(f)+\text{reg}(g)} + \underbrace{(x-a)^n(\lambda\phi(x) + \psi(x))}_{=o_a((x-a)^n)}.$$

□

Exemple 2.11. On a les $DL_2(0)$: $\frac{1}{1-x} = x + x^2 + o(x^2)$ et $\sin(x) = x + o(x^2)$ donc $\frac{1}{1-x} - \sin(x) = x^2 + o(x^2)$, ce qui entraîne par ailleurs $\frac{1}{1-x} - \sin(x) \sim_0 x^2$.

2.2.2 Produit

Lemme 2.12 (Règles de calcul)**.** *Soient $k, \ell \geq 0$ deux entiers et $a \in \mathbb{R}$.*

(a) *Si $g(x) = o_a((x-a)^\ell)$ alors $(x-a)^k g(x) = o_a((x-a)^{k+\ell})$.*

(b) *Si $f(x) = o_a((x-a)^k)$ et $g(x) = o_a((x-a)^\ell)$ alors $f(x)g(x) = o_a((x-a)^{k+\ell})$.*

Autrement dit,

$$(x-a)^k \times o_a((x-a)^\ell) = o_a((x-a)^{k+\ell}) \quad \text{et} \quad o_a((x-a)^k) \times o_a((x-a)^\ell) = o_a((x-a)^{k+\ell}).$$

Démonstration. (a) $\dfrac{(x-a)^k g(x)}{(x-a)^{k+\ell}} = \dfrac{g(x)}{(x-a)^\ell} \to 0$ si $x \to a$.

(b) $\dfrac{f(x)g(x)}{(x-a)^{k+\ell}} = \dfrac{f(x)}{(x-a)^k} \times \dfrac{g(x)}{(x-a)^\ell} \to 0$ si $x \to a$.

□

En utilisant ces règles de calcul, et une distributivité, on obtient l'énoncé suivant :

Proposition 2.13. *Si $f, g : D \to \mathbb{R}$ admettent un $DL_n(a)$, alors la fonction produit fg aussi, de plus la partie régulière du $DL_n(a)$ de fg s'obtient en faisant le produit des parties régulières des $DL_n(a)$ de f et de g, et en tronquant au degré n.*

Exemple 2.14. (a) Soit $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \frac{x}{1-x}$. On a les $DL_2(0)$: $\frac{x}{1-x} = x + x^2 + o(x^2)$ et $\sin(x) = x + o(x^2)$. En appliquant la proposition, on obtient que la fonction $x \mapsto \frac{x\sin(x)}{1-x}$ admet un $DL_2(0)$ dont la partie régulière s'obtient en tronquant $(x+x^2)\times x = x^2 + x^3$ au degré 2, d'où $\frac{x\sin(x)}{1-x} = x^2 + o(x^2)$.

(b) On peut aussi retrouver le résultat du point précédent en faisant le calcul directement :

$$\begin{aligned}
\frac{x\sin(x)}{1-x} = \frac{x}{1-x} \times \sin(x) &= (x + x^2 + o(x^2))(x + o(x^2)) \\
&= x^2 + x^3 + \underbrace{xo(x^2) + xo(x^2) + o(x^2)o(x^2)}_{=o(x^3)} \\
&= x^2 + x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

On en déduit en particulier la formule de (a) : $\frac{x\sin(x)}{1-x} = x^2 + o(x^2)$. Mais notre résultat est plus précis, c'est un $DL_3(0)$.

(c) On connaît les $DL_2(0)$: $\sin(x) = x + o(x^2)$ et $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. D'après la proposition, $x \mapsto \sin(x)\cos(x)$ a un $DL_2(0)$ de partie régulière x. Voyons si on obtient mieux en faisant le calcul directement :

$$\begin{aligned}
\sin(x) \times \cos(x) &= (x + o(x^2))(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) \\
&= x - \frac{x^3}{2} + \underbrace{xo(x^2) + o(x^2) - \frac{1}{2}x^2 o(x^2)}_{=o(x^2)} \\
&= x + o(x^2).
\end{aligned}$$

Dans cet exemple, le résultat de la proposition est optimal.

Remarque : la partie (b) de l'exemple montre qu'en effectuant le calcul directement, on peut obtenir un résultat plus précis que celui indiqué par la proposition. C'est pourquoi, en pratique, on n'applique pas nécessairement la proposition mais on peut opter pour un calcul direct. On peut néanmoins établir aussi un résultat théorique plus précis. Il est basé sur la définition suivante :

Définition 2.15. Soit f une fonction admettant un $DL_n(a)$ de partie régulière non nulle :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\phi(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to a} \phi(x) = 0.$$

En notant par $k \in \{0, \ldots, n\}$ le premier indice tel que $a_k \neq 0$, on peut écrire :

$$f(x) = (x-a)^k \Big[a_k + a_{k+1}(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \underbrace{(x-a)^{n-k}\phi(x)}_{o_a((x-a)^{n-k})}\Big].$$

Cette écriture est appelée *forme normale* du $DL_n(a)$ de f.

Proposition 2.16. *Supposons que f et g ont respectivement un $DL_{k+p}(a)$ et un $DL_{\ell+p}(a)$ de formes normales suivantes :*

$$f(x) = (x-a)^k \Big[\underbrace{\sum_{i=0}^{p} a_i'(x-a)^i}_{\mathrm{reg}'(f)} + o_a((x-a)^p) \Big], \quad g(x) = (x-a)^\ell \Big[\underbrace{\sum_{i=0}^{p} b_i'(x-a)^i}_{\mathrm{reg}'(g)} + o_a((x-a)^p) \Big].$$

Alors fg a un $DL_{k+\ell+p}(a)$ de forme normale

$$fg(x) = (x-a)^{k+\ell} \Big[P(x) + o_a((x-a)^p) \Big]$$

où $P(x)$ s'obtient en effectuant le produit $\mathrm{reg}'(f) \times \mathrm{reg}'(g)$ et en tronquant au degré p.

Exemple 2.17. Reprenons l'Exemple 2.14 (b). On a les formes normales suivantes : $\frac{x}{1-x} = x(1 + x + o(x))$ et $\sin(x) = x(1 + o(x))$. Donc $\frac{x\sin(x)}{1-x} = x^2(1 + x + o(x))$, d'où on retrouve le $DL_3(0)$: $\frac{x\sin(x)}{1-x} = x^2 + x^3 + o(x^3)$.

2.2.3 Composition

On ajoute une règle de calcul :

Lemme 2.18 (Règle de calcul 2)**.** *Si $f(x) \sim_a \lambda g(x)$, où λ est un scalaire non nul, et $h(x) = o_a(f(x))$, alors $h(x) = o_a(g(x))$. Autrement dit,*

$$f(x) \sim_a g(x) \Rightarrow o_a(f) = o_a(g).$$

Démonstration. Les hypothèses permettent d'écrire, au voisinage de a :

$$f(x) = \eta(x)\lambda g(x) \quad \text{et} \quad h(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0, \ \lim_{x\to a} \eta(x) = 1.$$

D'où :

$$h(x) = \lambda\varepsilon(x)\eta(x)f(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to a} \lambda\varepsilon(x)\eta(x) = 0$$

ce qui entraîne la conclusion. □

Cette règle permet, par exemple, de simplifier une expression, en remplaçant une expression du type

$$o\left(\left(\frac{1}{2}x + 3x^2 + o(x^2)\right)^3\right) \quad \text{par} \quad o(x^3).$$

En se basant sur cette règle de calcul, on obtient :

Proposition 2.19. *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(D) \subset E$ de sorte que la composition $g \circ f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(f(x))$ est bien définie. De plus on* *suppose f définie près de $a \in \mathbb{R}$, g définie près de $b \in \mathbb{R}$, et que f et g ont respectivement un $DL_n(a)$ et un $DL_n(b)$ de la forme suivante :*

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n}_{\mathrm{reg}(f)} + o\big((x-a)^n\big) \quad \boxed{\text{avec } a_0 = b}$$

$$g(y) = \underbrace{b_0 + b_1(y-b) + \ldots + b_n(y-b)^n}_{\mathrm{reg}(g)} + o\big((y-b)^n\big).$$

Alors $g \circ f$ a un $DL_n(a)$, dont la forme régulière s'obtient en composant les formes régulières des deux développements : $\mathrm{reg}(g) \circ \mathrm{reg}(f)$, et en tronquant au degré n.

Exemple 2.20. (a) La composition $\ln \circ \cos$ est bien définie, sur l'intervalle $D =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Nous connaissons déjà le $DL_2(0)$ de la fonction cos : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Nous connaîtrons bientôt le $DL_2(1)$ de la fonction ln : $\ln(y) = (y-1) - \frac{(y-1)^2}{2} + o\big((y-1)^2\big)$. D'après la proposition, $\ln \circ \cos$ a un $DL_2(0)$ de partie régulière obtenue en tronquant au degré 2 la composition des parties régulières

$$\left[\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - 1\right] - \frac{\left[\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - 1\right]^2}{2}$$

ce qui donne

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

(b) En pratique, au lieu d'appliquer la proposition, on préfère effectuer le calcul directement (en utilisant les règles de calculs des lemmes précédents), dans l'exemple ci-dessus on écrit :

$$\begin{aligned} \ln(\cos(x)) &= \left[\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 1\right] - \frac{\left[\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 1\right]^2}{2} \\ &\quad + o\left(\left[\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 1\right]^2\right). \end{aligned}$$

Dans certain cas, un calcul direct peut permettre d'avoir un développement limité d'ordre plus élevé.

2.2.4 Quotient

Un quotient de la forme $\frac{1}{f}$ s'écrit sous la forme : $\frac{1}{f} = I \circ f$ où $I : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est la fonction inverse. Un tel quotient peut donc être vu comme une composition de fonctions. Or dans l'Exemple 2.9 (b) nous avons vu que I a un $DL_n(a)$ pour tout $a_0 \in \mathbb{R}^*$, tout $n \geq 0$, donné par la formule :

$$I(x) = \frac{1}{x} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(x-a_0)^k}{a_0^{k+1}}}_{\mathrm{reg}(I)} + \phi(x), \quad \text{avec} \quad \phi(x) = o((x-a_0)^n).$$

D'où, en combinant cela avec la Proposition 2.19, l'énoncé suivant :

Proposition 2.21. *Soit $f : D \to \mathbb{R}^*$ une fonction définie près de $a \in \mathbb{R}$, admettant un $DL_n(a)$ de la forme*

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n}_{\mathrm{reg}(f)} + o\big((x-a)^n\big) \quad \text{avec } a_0 \neq 0.$$

Alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ admet un $DL_n(a)$ dont la partie régulière s'obtient en faisant la composition des parties régulières $\mathrm{reg}(I) \circ \mathrm{reg}(f)$ et en tronquant au degré n.

Là encore, en pratique, on préfère effectuer le calcul directement, comme dans l'exemple suivant.

Exemple 2.22. Soit f une fonction admettant le $DL_2(0)$: $f(x) = 2 - x + x^2 + o(x^2)$. On calcule alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{2 - x + x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - (\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^2))} \\
&= \frac{1}{2}\Big[1 + \Big(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big) + \Big(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big)^2 + o\Big(\Big(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big)^2\Big)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\Big] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).
\end{aligned}$$

On peut ensuite étudier un quotient de la forme $\frac{g(x)}{f(x)}$ en l'écrivant sous la forme d'un produit $g(x) \times \frac{1}{f(x)}$.

- Lorsque f admet un $DL_n(a)$ de coefficient constant $a_0 \neq 0$: on peut alors déterminer un $DL_n(a)$ de $\frac{1}{f(x)}$ (comme dans l'exemple ci-dessus) et le combiner avec un $DL_n(a)$ pour en déduire (par produit de développements limités) un $DL_n(a)$ de $g(x) \times \frac{1}{f(x)}$.
- Si f admet un $DL_n(a)$ dont le coefficient constant a_0 est nul : on écrit les $DL_n(a)$ de f et g sous forme normalisée :

$$f(x) = (x-a)^p[\underbrace{a_p}_{\neq 0} + a_{p+1}(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^{n-p} + o((x-a)^{n-p})],$$
$$g(x) = (x-a)^q[\underbrace{b_q}_{\neq 0} + b_{q+1}(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^{n-q} + o((x-a)^{n-q})].$$

Si $p > q$ alors le quotient $\frac{g}{f}$ n'a pas de limité finie, donc pas de développement limité, en a. En revanche, si $p \leq q$, après simplification par $(x-a)^p$, on se ramène à l'étude d'un quotient dont le dénominateur a un $DL_{n-p}(a)$ dont le coefficient constant est non nul, et on en déduit que $\frac{g}{f}$ admet un $DL_{n-p}(a)$, que l'on peut calculer explicitement.

Exemple 2.23. Supposons que f et g ont les $DL_3(0)$: $f(x) = 2x - x^2 + x^3 + o(x^3)$ et $g(x) = 2x^2 + o(x^3)$. On écrit

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{f(x)} &= \frac{x^2(2+o(x))}{x(2-x+x^2+o(x^2))} = \frac{2x+o(x^2)}{2-x+x^2+o(x^2)}\\ &= (2x+o(x^2))\Big(\frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)\Big) \quad \text{(d'après l'Exemple 2.22)}\\ &= x+\frac{x^2}{2}+o(x^2).\end{aligned}$$

Autre méthode : En pratique, pour calculer un développement limité en 0 d'un quotient, dans le cas où le dénominateur a un $DL_n(0)$ de coefficient constant non nul, on peut faire une **division suivant les puissances croissantes**.

Par exemple : soient $f(x) = 2 - x + x^2 + o(x^2)$ et $g(x) = 1 + 2x - 3x^2 + o(x^2)$. Pour calculer un $DL_2(0)$ de g/f, on pose la division :

$$\begin{array}{r|l} 1+2x-3x^2+o(x^2) & 2-x+x^2+o(x^2) \\ \cline{2-2} -1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2) & \frac{1}{2}+\frac{5}{4}x-\frac{9}{8}x^2 \\ \cline{1-1} \frac{5}{2}x-\frac{7}{2}x^2+o(x^2) & \\ -\frac{5}{2}x+\frac{5}{4}x^2+o(x^2) & \\ \cline{1-1} -\frac{9}{4}x^2+o(x^2) & \\ \frac{9}{4}x^2+o(x^2) & \\ \cline{1-1} o(x^2) & \end{array}$$

Ce calcul entraîne :

$$g(x) = 1 + 2x - 3x^2 + o(x^2) = f(x) \times (\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{4}x - \tfrac{9}{8}x^2) + o(x^2)$$

donc

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} + \frac{5}{4}x - \frac{9}{8}x^2 + \frac{1}{f(x)}o(x^2) = \frac{1}{2} + \frac{5}{4}x - \frac{9}{8}x^2 + o(x^2)$$

(car $\lim_{x\to 0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}$ donc un produit de la forme $\frac{1}{f(x)} \times o(x^2)$ est négligeable devant x^2 donc peut encore s'écrire $o(x^2)$).

2.2.5 Primitivation

Une autre opération possible sur un développement limité est la "primitivation" :

Proposition 2.24. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a, continue sur I, et donc admettant des primitives sur I. Supposons que, pour $n \geq 0$, la fonction f admet le $DL_n(a)$:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Alors toute primitive F de f admet un $DL_{n+1}(a)$, donné par

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

Démonstration. On écrit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + \phi(x)$$

où $\phi(x) = o((x-a)^n)$. Comme f est continue, on a

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k(t-a)^k + \phi(t)\,dt\Big).$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + \int_a^x \phi(t)\,dt.$$

Pour avoir le développement limité souhaité, il reste à justifier que

$$(*) \qquad \lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^{n+1}} \int_a^x \phi(t)\,dt = 0.$$

Pour voir cela, on utilise la définition de la limite. Soit $\varepsilon > 0$. Comme on sait que $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\phi(t)}{(t-a)^n} = 0$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$$0 < |t-a| \leq \alpha \ \Rightarrow \ \Big|\frac{\phi(t)}{(t-a)^n}\Big| \leq \varepsilon.$$

Soit $x \in I$ tel que $0 < |x-a| \leq \alpha$. Pour tout t strictement compris entre a et x, on a alors $0 < |t-a| \leq |x-a| \leq \alpha$ donc $|\phi(t)| \leq \varepsilon|t-a|^n \leq \varepsilon|x-a|^n$, ce qui permet de borner l'intégrale ci-dessus :

$$\Big|\frac{1}{(x-a)^{n+1}} \int_a^x \phi(t)\,dt\Big| \leq \frac{1}{|x-a|^{n+1}} \underbrace{\Big|\int_a^x \underbrace{|\phi(t)|}_{\leq\varepsilon|x-a|^n} \, dt\Big|}_{\leq|x-a|\times\varepsilon|x-a|^n} \leq \varepsilon.$$

On a donc montré la formule mathématique :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\alpha > 0,\ \forall x \in I,\ 0 < |x-a| \leq \alpha \Rightarrow \Big|\frac{1}{(x-a)^{n+1}} \int_a^x \phi(t)\,dt\Big| \leq \varepsilon$$

ce qui montre $(*)$. $\square$

Exemple 2.25. (a) On connaît le $DL_n(0)$ suivant :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$

Or la fonction $x \mapsto -\ln(1-x)$ est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ qui s'annule en 0, donc

$$-\ln(1-x) = 0 + \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$$

d'où le $DL_{n+1}(0)$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^{n+1}).$$

(b) On connaît le $DL_1(0)$ de la fonction sinus :

$$\sin(x) = x + o(x)$$

ce qui entraîne, par primitivation, un $DL_2(0)$ de cosinus :

$$-\cos(x) = -\cos(0) + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

donc

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

C'est le $DL_2(0)$ de cos qu'on avait déjà trouvé par une autre méthode. En continuant de primitiver, on obtient un $DL_3(0)$ de sin :

$$\sin(x) = \sin(0) + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

puis un $DL_4(0)$ de cos, puis un $DL_5(0)$ de sin, etc.

La partie (b) de l'exemple suggère que, de proche en proche, on peut obtenir un $DL_n(a)$ de toute fonction suffisamment dérivable. Ce principe trouve sa formalisation dans la section suivante.

2.3 Formule de Taylor–Young

Theorem 2.26. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a. Si f est n fois dérivable sur I, alors la fonction f admet un $DL_n(a)$ donné par*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \geq 1$. L'initialisation a été faite dans la section 1.5. Pour l'hérédité, on suppose le théorème vrai pour les fonctions n fois dérivables. On suppose que f est $n+1$ fois dérivable. Alors f' est n fois dérivable, donc la formule du théorème est vraie pour f' :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Notons que $(f')^{(k)}(a) = f^{(k+1)}(a)$. Ensuite, par la Proposition 2.24, on obtient un $DL_{n+1}(a)$ de f, qui a la forme indiquée par l'énoncé. □

À l'aide des techniques développées, on obtient, dans la Table 2.1, les développements limités en 0 pour les fonctions usuelles (qu'il faut connaître).

2.4 Développements asymptotiques, développements limités à l'infini

Développement asymptotique : Dans les paragraphes précédents, on a choisi les x^k $(k \geq 0)$ comme une "échelle d'infiniment petits" au voisinage de 0. On peut, au voisinage de 0, choisir d'autres échelles et on obtient un *développement asymptotique*, dont le principe général est d'écrire une fonction comme une somme où chaque terme est négligeable devant le terme qui le précède.

Exemple 2.27. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x+x^2}$. Cette fonction est continue mais n'est pas dérivable en 0 donc elle n'admet pas un développement limité en 0 d'ordre ≥ 1. En revanche, elle admet un développement asymptotique en choisissant l'échelle des $x^{\frac{1}{2}}$:

$$\sqrt{x+x^2} = \sqrt{x}\sqrt{1+x} = \sqrt{x}\Big(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\Big) = x^{1/2} + \frac{1}{2}x^{3/2} - \frac{1}{8}x^{5/2} + o(x^{5/2}).$$

Développement limité en $\pm\infty$: La notion de développement asymptotique prend sens au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$) : on appelle *développement limité en* $+\infty$ (ou $-\infty$) un développement asymptotique suivant l'échelle des x^{-k} $(k \geq 0)$.

Exemple 2.28. Au voisinage de $+\infty$, en choisissant l'échelle des x^{-k} :

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x^2-1} &= \frac{1}{x} \times \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x}\Big(1+\frac{2}{x}\Big)\Big(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+o\Big(\frac{1}{x^4}\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^5} + o\Big(\frac{1}{x^5}\Big). \end{aligned}$$

Application à la recherche d'asymptote à une courbe : Si f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle de la forme $[A, +\infty[$, la courbe de f admet une asymptote d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0.$$

En pratique, pour déterminer une asymptote, on peut chercher un développement asymptotique de f en $+\infty$. Si f a un développement asymptotique de la forme

$$f(x) = ax + b + a_1 \frac{1}{x} + \ldots + a_n \frac{1}{x^n} + o(x^{-n})$$

alors la droite $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe en $+\infty$.

Si a_p, avec $p \geq 1$, désigne le premier coefficient non nul qui apparaît dans ce développement asymptotique, alors on a l'équivalence :

$$f(x) - (ax + b) \sim_{+\infty} a_p \frac{1}{x^p}.$$

En étudiant le signe de $a_p \frac{1}{x^p}$ au voisinage de $+\infty$, on peut en déduire la position de la courbe de f par rapport à son asymptote. On peut naturellement mener une étude similaire au voisinage de $-\infty$.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

(où α désigne un réel)

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

TABLE 2.1: Développements limités en 0 des fonctions usuelles

3 Extrema des fonctions

3.1 Définition

Définition 3.1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $a \in I$.

(a) On dit que f présente un *maximum global* (resp. minimum global) au point a, si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leq f(a)$ (resp. si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geq f(a)$).

(b) On dit que f a un *maximum local* (resp. minimum local) au point a, si on a $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$) pour tout x au voisinage de a dans I.

Autrement dit, f a un maximum local (resp. minimum local) en a s'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $x \in I$ vérifiant $|x - a| \leq \alpha$ on a $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).

Remarque 3.2. (a) Bien sûr, si f présente un maximum (ou minimum) global en a, alors a fortiori f présente un maximum (ou minimum) local en a.

(b) On parle de maximum ou de minimum local strict en a si l'inégalité stricte $f(x) < f(a)$, resp. $f(x) > f(a)$, est vraie pour $x \neq a$ au voisinage de a.

Exemple 3.3. (a) La fonction carrée $x \mapsto x^2$ présente un minimum global en 0, et c'est le seul point où elle présente un extremum local

(b) La fonction $x \mapsto -(x-1)^2 + 3$ présente un maximum global en 1.

(c) Soit $f : x \mapsto x^3 - x^2$, définie sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, la fonction f n'a pas de maximum global ni de minimum global sur $\mathbb{R}$. La fonction f est dérivable et on a $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x-2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'étude du signe de la dérivée montre que f est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty; 0]$ et $[\frac{2}{3}; +\infty[$ et strictement décroissante sur $[0; \frac{2}{3}]$, ce qui entraîne que f présente un maximum local en 0 et un minimum local en $\frac{2}{3}$.

Rappel du cours d'Analyse 2 :

Theorem 3.4 (Théorème de Heine)**.** *Toute fonction f continue sur un segment $[c, d]$ est bornée et atteint ses bornes.*

Ainsi toute fonction continue sur un segment admet un minimum global et un maximum global.

3.2 Condition nécessaire et condition suffisante d'extremum local pour une fonction régulière

3.2.1 Extrema et dérivées premières

Proposition 3.5. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit a un point intérieur de I (i.e., pas une borne de l'intervalle). On suppose que f dérivable au* *point a. Si f présente un maximum local ou un minimum local au point a, alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration. Supposons que f présente un maximum local en a. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$ on a $f(x) \leq f(a)$. Comme a est un point intérieur de I, quitte à choisir α plus petit si nécessaire, on peut supposer $[a-\alpha, a+\alpha] \subset I$. Pour $x < a$, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

et en passant à la limite lorsque $x \to a$ avec $x < a$, on obtient

$$f'(a) \geq 0.$$

De même pour $x > a$, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

et en passant à la limite lorsque $x \to a$ avec $x > a$, on obtient

$$f'(a) \leq 0.$$

D'où $f'(a) = 0$. □

Remarque 3.6. (a) La réciproque de cette proposition est fausse. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^3$ vérifie $f'(0) = 0$, pourtant cette fonction ne présente pas d'extremum local en 0.

(b) La proposition ne donne aucune condition nécessaire pour avoir un extremum local en une borne de l'intervalle I.

Exemple 3.7. Si $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$, alors f est continue sur le segment $[0, \pi]$ donc y est bornée et atteint ses bornes. De plus f est dérivable et on a $f'(x) = -\sin(x) + \cos(x)$ pour tout x. Donc f s'annule sur $[0, \pi]$ en $x_0 = \pi/4$. On a $f(x_0) = \sqrt{2}$, $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1$. Donc

- le maximum de f sur $[0, \pi]$ est atteint en $\pi/4$ et vaut $\sqrt{2}$,
- son minimum est atteint en π et vaut -1. Il s'agit donc a fortiori d'un minimum local, mais pourtant $f'(\pi) \neq 0$.

3.2.2 Extrema et dérivées secondes ou d'ordre supérieur

Proposition 3.8. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit a un point intérieur de I. On suppose que f est deux fois dérivable en a, et que a est un point critique de f, i.e., $f'(a) = 0$. Alors :*

- *si $f''(a) > 0$, alors f présente un minimum local strict en a,*
- *si $f''(a) < 0$, alors f présente un maximum local strict en a.*

En particulier, si $f''(a) \neq 0$, alors f présente un extremum local en a.

On a en fait une propriété plus générale :

Proposition 3.9. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit a un point intérieur de I. On suppose que f est n fois dérivable en a (avec $n \geq 2$), et que a est un point critique de f, i.e., $f'(a) = 0$. On suppose en outre qu'il existe $p \in \{2, \dots, n\}$ tel que $f^{(p)}(a) \neq 0$ et on note par p le plus petit entier vérifiant cela. Alors :*

- *Si p est pair, alors f présente un extremum local en a, plus précisément si $f^{(p)}(a) > 0$, alors f présente un minimum local strict en a, et si $f^{(p)}(a) < 0$, alors f présente un maximum local strict en a.*
- *Si p est impair, alors f ne présente pas d'extremum local en a.*

Démonstration. On écrit la formule de Taylor–Young à l'ordre p en a et, puisque $f'(a) = 0$, on obtient

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p + o((x-a)^p).$$

Alors

$$f(x) - f(a) \sim_a (x-a)^p \frac{f^{(p)}(a)}{p!}$$

et donc, pour $x \neq a$ au voisinage de a, la quantité $f(x) - f(a)$ est de même signe que $f^{(p)}(a)(x-a)^p$.

Lorsque p est pair : si $f^{(p)}(a) > 0$, on a l'inégalité $f(x) > f(a)$ au voisinage de a, et f présente un minimum local strict en a, et si $f^{(p)}(a) < 0$, on a, dans un voisinage de a, l'inégalité $f(x) < f(a)$, de sorte que f présente un maximum local strict en a.

Lorsque p est impair : $f^{(p)}(a)(x-a)^p$ change de signe en a, donc $f(x) - f(a)$ aussi, ce qui entraîne qu'il n'y a pas d'extremum local en a dans ce cas. $\square$

Exemple 3.10. Si

$$f(x) = \sin^3(x) + 2\cos(x) + x^2 \text{ et } g(x) = f(x) - x^3,$$

alors au voisinage de 0, on a

$$f(x) = (x + o(x^2))^3 + 2(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}) + x^2 = 2 + x^3 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

et

$$g(x) = 2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

donc f n'admet pas d'extremum en 0 mais g admet un minimum local en 0 qui vaut 2.

4 Fonctions convexes

4.1 Définition

Définition 4.1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que f est *convexe* sur I si

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

On dit que f est *concave* si $-f$ est convexe, autrement dit si

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

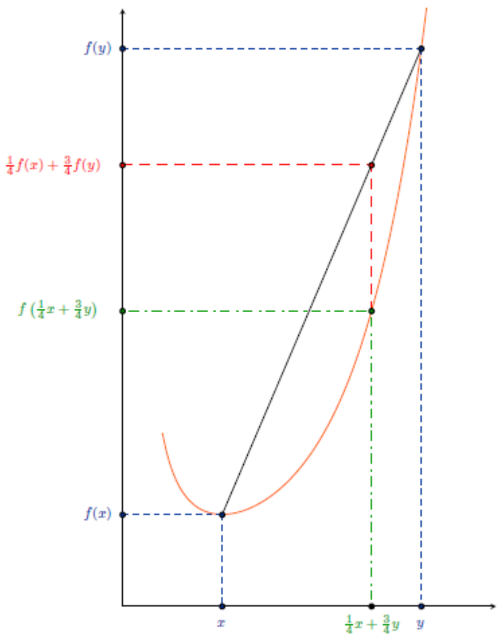
Interprétation graphique

Les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ sont deux points de la courbe de f.

En reliant ces deux points par un segment, on obtient une *corde*.
Lorsque $\lambda \in [0,1]$, le point de coordonnées $(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))$ est un point de cette corde.

L'inégalité de la définition signifie que le point du graphe de f d'abscisse $\lambda x + (1-\lambda)y$ est situé en dessous du point de la corde de même abscisse.

Conclusion : *f est convexe si et seulement si le graphe de f est au dessous de chacune de ses cordes.*



Exemple 4.2. (a) L'application valeur absolue $x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
[En effet : soient $\lambda \in [0,1]$, $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$|\lambda x + (1-\lambda)y| \leq |\lambda x| + |(1-\lambda)y| = \lambda |x| + (1-\lambda)|y|$$

par l'inégalité triangulaire.]
(b) La fonction carré $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

[En effet : soient $\lambda \in [0,1]$, $x, y \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 - (\lambda x + (1-\lambda)y)^2 &= \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 - \lambda^2 x^2 - (1-\lambda)^2 y^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy \\
&= \lambda(1-\lambda)x^2 + \lambda(1-\lambda)y^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy \\
&= \lambda(1-\lambda)(x^2 + y^2 - 2xy) \\
&= \lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

car $\lambda \geq 0$ et $1 - \lambda \geq 0$.]

Lorsque f est convexe, l'inégalité de la Définition 4.1 est en fait vraie pour un nombre quelconque de variables :

Proposition 4.3 (Inégalité de Jensen)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe définie sur un intervalle. Soient $n \geq 1$, $x_1, \ldots, x_n$ des points de I et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Alors*

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

En particulier

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Exemple 4.4. En appliquant l'inégalité de Jensen à la fonction carré, on obtient :

$$\forall n \geq 1,\ \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R},\ \Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Démonstration de la Proposition 4.3. On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$. Initialisation : si $n = 1$, alors $\lambda_1 = 1$ et la propriété est immédiate. Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 1$ et montrons-la au rang $n+1$. Soient $x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ des réels positifs tels que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 1$. Si $\lambda_{n+1} = 1$ alors $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ et de nouveau l'inégalité est immédiate. Supposons donc $0 \leq \lambda_{n+1} < 1$. On pose alors $X = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i$. On écrit

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = (1-\lambda_{n+1})X + \lambda_{n+1}x_{n+1}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
f\Big(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\Big) &\leq (1-\lambda_{n+1})f(X) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \qquad \text{(car } f \text{ est convexe)} \\
&\leq (1-\lambda_{n+1})\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \\
&\qquad\qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).
\end{aligned}$$

□

4.2 D'autres caractérisations graphiques de la convexité

L'*épigraphe* de f est l'ensemble des points situés sur ou au dessus de la courbe de f, donc l'ensemble des points de coordonnées (x, y) avec $y \geq f(x)$. Une partie A du plan est dite convexe si, pour tous points M, M' dans A, le segment $[MM']$ est toujours contenu dans A.

Proposition 4.5. *La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.*

Démonstration. $\Rightarrow$: Supposons f convexe. Soient $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points de l'épigraphe de f ; donc $y \geq f(x)$ et $y' \geq f(x')$. Un point du segment $[MM']$ a pour coordonnées $(\lambda x+(1-\lambda)x', \lambda y+(1-\lambda)y')$. Pour voir que ce point appartient à l'épigraphe, on calcule

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)x') \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x') \leq \lambda y + (1 - \lambda)y'$$

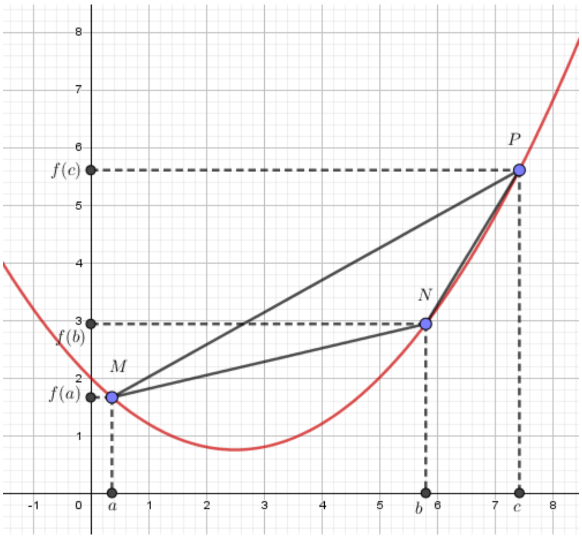
où la première inégalité provient du fait que f est convexe et la seconde égalité provient du fait que M et M' appartiennent à l'épigraphe.

$\Leftarrow$: Supposons l'épigraphe de f convexe. Si M et M' sont deux points du graphe de f, alors le segment $[MM']$ est une corde du graphe. L'hypothèse que l'épigraphe est convexe entraîne que le graphe de f est situé au dessous de la corde $[MM']$. Donc le graphe de f est situé au dessous de chacune de ses cordes. D'après l'interprétation graphique de la Définition 4.1, cela entraîne que f est convexe. □

Proposition 4.6. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est convexe ;*
(ii) *pour tous $a, b, c \in I$ avec $a < b < c$, on a*

$$(*) \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$



Remarque 4.7. On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \quad &\Leftrightarrow \quad (c-a)(f(b)-f(a)) \le (b-a)(f(c)-f(a)) \\
&\Leftrightarrow \quad (c-b)f(a)+(a-c)f(b)+(b-a)f(c) \ge 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \le \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(c)-f(b)}{c-b}
\end{aligned}$$

donc les trois inégalités contenues dans la formule $(*)$ sont en fait équivalentes.

Démonstration. On note par M, N, P les points du graphe de f d'abscisses a, b, c, donc les points de coordonnées $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, $(c, f(c))$. L'encadrement $(*)$ est équivalent à la propriété d'avoir N au dessous du segment $[MP]$. La condition (ii) est donc équivalente à avoir que le graphe de f est au dessous de chacune de ses cordes. D'après l'interprétation graphique de la Définition 4.1, cette propriété équivaut à la convexité de f. □

4.3 Convexité pour les fonctions régulières

Proposition 4.8. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est convexe ;*

(ii) *f' est croissante ;*

(iii) *le graphe de f est situé au dessus de ses tangentes.*

Démonstration. (i)⇒(iii) : on suppose f convexe. Fixons $a \in I$. On souhaite montrer :

$$(*) \qquad f(x) \ge f(a) + f'(a)(x-a) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Si $x = a$, l'inégalité est claire. Supposons d'abord $x > a$. Soit $y \in]a, x[$. Par la Proposition 4.6, on a

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

En faisant tendre y vers a, on déduit

$$f'(a) \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

d'où $(*)$ dans le cas où $x > a$. Supposons ensuite $x < a$. Soit $y \in]x, a[$. En invoquant encore la Proposition 4.6, on a

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(a) - f(y)}{a - y} = \frac{f(y) - f(a)}{y - a}.$$

En faisant tendre y vers a, on déduit

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq f'(a)$$

d'où $(*)$ dans le cas où $x < a$.

(iii)$\Rightarrow$(ii) : soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Le graphe de f étant situé au dessus de ses tangentes aux points a et b, on obtient respectivement

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{et} \quad f(x) \geq f(b) + f'(b)(x - b)$$

pour tout $x \in I$. En appliquant la première inégalité pour $x = b$ puis la seconde pour $x = a$, on obtient :

$$f(b) \geq f(a) + f'(a)(b - a) \quad \text{et} \quad f(a) \geq f(b) + f'(b)(a - b)$$

d'où

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b).$$

(ii)$\Rightarrow$(i) : on suppose f croissante. Soient $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$. Par le théorème des accroissements finis il existe $a_0 \in]a, b[$ et $b_0 \in]b, c[$ tels que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a_0) \quad \text{et} \quad \frac{f(c) - f(b)}{c - b} = f'(b_0).$$

Comme $a_0 < b_0$, le fait que f' est croissante entraîne $f'(a_0) \leq f'(b_0)$, donc

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

D'après la Remarque 4.7 on a donc

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

Cela est vrai quels que soient a, b, c, donc par la Proposition 4.6, f est convexe. □

Corollaire 4.9. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle I. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *f est convexe ;*
(ii) *$f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.*

Exemple 4.10. exp est convexe tandis que ln est concave.

5 Courbes paramétrées

5.1 Rappel : courbes représentatives des fonctions

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle. Un repère orthonormé du plan étant fixé, la *courbe représentative* de f, notée $\mathcal{C}_f$, est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$.

- Si f est continue alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est *connexe* (=d'un seul tenant ; formée par une ligne continue ; on peut la tracer sans lever le crayon).
- Si f est dérivable, alors la courbe admet une tangente en tout point ; au point d'abscisse a le coefficient directeur de la tangente est $f'(a)$ (et l'équation est $y = f(a) + f'(a)(x - a)$).

Remarque 5.1. (a) Il n'est pas nécessaire que f soit dérivable pour que la courbe admette une tangente en tout point. Par exemple, soit $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$. La fonction f est continue sur $[0; +\infty[$, dérivable sur $]0; +\infty[$, mais pas dérivable en 0. Néanmoins la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente (verticale) en l'origine.

(b) Une courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction ne peut pas avoir deux points ayant même abscisse x (car x n'a qu'une seule image par f). En particulier, un cercle ne peut pas être la courbe d'une fonction.

Exemple 5.2. Soit $f : [-1; 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$. La courbe $\mathcal{C}_f$ est le demi-cercle supérieur de centre l'origine et rayon 1. La fonction f est dérivable sur $]-1; 1[$ et pour tout $x \in]-1; 1[$ on a $f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$. La fonction f n'est pas dérivable en 1 et -1 car $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$ et $\lim_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = +\infty$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet des tangentes verticales aux points d'abscisses 1 et -1.

- D'autres propriétés de la fonction f peuvent s'interpréter graphiquement sur la courbe $\mathcal{C}_f$:
  - Si f est paire, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
  - Si f est impaire, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
  - Si f est bijective et g note sa bijection réciproque, alors $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

5.2 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

On s'intéresse désormais à des fonctions $f : D \to \mathbb{R}^2$ définies sur une partie D de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Une telle fonction peut s'écrire :

$$f(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{pour tout } t \in D$$

où $x, y : D \to \mathbb{R}$ sont appelées *fonctions coordonnées.*

On peut étendre les notions vues pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$:

Définition 5.3. (a) On dit que f est *continue* en $a \in D$ (resp. sur D) si les fonctions coordonnées x, y sont continues en $a \in D$ (resp. sur D).

(b) On dit que f est *dérivable* en a (resp. sur D) si les fonctions coordonnées x, y sont dérivables en a (resp. sur D). On note alors $f'(a) = (x'(a), y'(a))$ le *vecteur dérivé* en a.

(c) Plus généralement on dit que f est n fois dérivable (ou de classe C^n) sur D si c'est le cas des fonctions coordonnées x et y. On note alors $f^{(n)}(t) = (x^{(n)}(t), y^{(n)}(t))$.

Exemple 5.4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ est une fonction de classe C^∞.

5.3 Courbe paramétrée

On fixe un repère orthonormé du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 5.5. Un *arc paramétré* de classe C^n $(n \geq 0)$ est la donnée d'un couple (I, f) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe C^n.

L'ensemble $\mathcal{C}_f := f(I)$, formé par les points M_t de coordonnées $f(t) = (x(t), y(t))$, est appelé support de l'arc, ou courbe paramétrée associée. On dit aussi que l'arc f est un paramétrage de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Remarque 5.6. (a) On dira plus simplement "arc paramétré" plutôt que "arc paramétré de classe C^0". D'après cette convention, on se limite à considérer des arcs paramétrés continus. Cela entraîne que la courbe paramétrée associée est connexe.

(b) On s'autorisera aussi occasionnellement à considérer des arcs paramétrés $f : D \to \mathbb{R}^2$ définis sur un ensemble D qui ne soit pas un intervalle mais une réunion d'intervalles. Dans ce cas la courbe associée ne sera pas connexe en général.

(c) Un arc paramétré est dit simple si l'application f est injective, ce qui signifie que les points M_t sont tous deux à deux distincts. Une courbe paramétrée est dite simple si elle admet un paramétrage par un arc paramétré simple.

Exemple 5.7. (a) La courbe représentative $\mathcal{C}_g$ d'une fonction $g : D \to \mathbb{R}$ continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ peut être obtenue comme courbe paramétrée, pour l'arc paramétré $f : D \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, g(t))$.

(b) La courbe paramétrée associée à $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ est le cercle centré en l'origine de rayon 1. L'arc paramétré $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))$ fournit un deuxième paramétrage de la même courbe. L'arc $f_2 : [0; 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ est un troisième paramétrage de la même courbe, qui est simple.

Remarque 5.8. On peut considérer que la courbe paramétrée $\mathcal{C}_f$ est la trajectoire d'un mobile, en fonction du paramètre t qui représente le temps. Ainsi dans l'Exemple 5.7 les arcs f et f_1 correspondent à une même trajectoire, mais dans le cas de f_1 la trajectoire est parcourue deux fois plus vite que pour f.

Dans l'étude d'une courbe paramétrée, on peut utiliser des symétries de la courbe pour réduire l'intervalle d'étude :

- Si f est T-périodique, alors on peut se limiter à l'étude de f sur un intervalle correspondant à une période, par exemple $[0;T[$.
- Si pour tout t on observe que le point de coordonnées $(-x(t),-y(t))$, resp. $(x(t),-y(t))$, resp. $(-x(t),y(t))$, resp. $(y(t),x(t))$ appartient encore à la courbe, alors cela signifie que la courbe est symétrique par rapport à l'origine, resp. l'axe des abscisses, resp. l'axe des ordonnées, resp. la droite d'équation $y=x$.

Exemple 5.9. Dans le cas de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto(\cos(t),\sin(t))$, la fonction f étant 2π-périodique, on peut se limiter à étudier f sur $[0;2\pi[$. Par ailleurs, pour tout $t\in[0;2\pi[$ on remarque que $(-\cos t,-\sin t)=(\cos(\pi+t),\sin(\pi+t))=f(\pi+t)$ donc $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine. On a aussi $(\sin t,\cos t)=f(\frac{\pi}{2}-t)$ donc f est symétrique par rapport à la droite d'équation $y=x$. On a de même que f est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et à celui des ordonnées. Au final, pour reconstituer toute la courbe, il suffit de considérer l'arc paramétré $[0;\frac{\pi}{4}]\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto f(t)$ et appliquer à sa courbe associée les transformations géométriques décrites ci-dessus.

5.4 Étude locale : tangente en un point

Lorsque la droite (M_aM_t) admet une position limite lorsque t tend vers a, on dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une *tangente* au point M_a. Remarque : si M_a est un point multiple de la courbe (i.e. $M_a=M_b$ pour au moins une autre valeur du paramètre $b\neq a$) alors il peut y avoir plusieurs tangentes au point M_a.

Définition 5.10. Soit $f:I\to\mathbb{R}^2$ un arc paramétré et $a\in I$. On dit que le nombre a est *régulier* pour f si le vecteur dérivé $f'(a)=(x'(a),y'(a))$ est non nul. Sinon, on dit que a est *singulier* pour f.

Proposition 5.11. *Si a est régulier pour f, alors $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point M_a, de vecteur directeur $\vec{V_a}=x'(a)\vec{i}+y'(a)\vec{j}$.*

Démonstration. Soit $t\in I\setminus\{a\}$. Étant donné $M(x;y)$, on a :

$$M\in(M_aM_t)\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x(t)-x(a) & x-x(a)\\ y(t)-y(a) & y-y(a)\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\frac{x(t)-x(a)}{t-a}(y-y(a))=\frac{y(t)-y(a)}{t-a}(x-x(a))$$

ce qui nous donne l'équation de la droite (M_aM_t). Lorsque t tend vers a, la droite a comme position limite la droite d'équation $x'(a)(y-y(a))=y'(a)(x-x(a))$ (le fait d'avoir $(x'(a),y'(a))\neq(0,0)$ garantit qu'il s'agit bien là de l'équation d'une droite). Cette droite est tangente à la courbe au point M_a, et $\vec{V_a}$ est un vecteur directeur de cette droite. □

Exemple 5.12. (a) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto(\cos t,\sin t)$. Alors $f'(t)=(-\sin t,\cos t)$ est non nul pour tout t. Donc tout $a\in\mathbb{R}$ est régulier pour f, et donc le vecteur $\vec{V_a}=$

$-(\sin a)\vec{i} + (\cos a)\vec{j}$ est un vecteur tangent à $\mathcal{C}_f$ au point M_a. Remarque : si $a = 0$ ou $a = \pi$, ce vecteur est vertical, si $a = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$, ce vecteur est horizontal.

(b) Soit $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto (t, \sqrt{t})$: cet arc paramétré n'est pas dérivable en 0... En posant $g : [0; +\infty[\to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^2, t)$, on obtient néanmoins un paramétrage dérivable (et même C^∞) de la même courbe paramétrée. Pour tout $t \in [0; +\infty[$ on a $g'(t) = (2t, t)$ de sorte que tout nombre $a \geq 0$ est régulier pour g. En particulier pour $a = 0$, on obtient que $\vec{V_0} = \vec{j}$ est un vecteur tangent (vertical) à la courbe, en l'origine.

En réalité, comme nous allons le voir, il n'est pas nécessaire que a soit régulier pour que la courbe admette une tangente au point M_a.

5.5 Développements limités des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

Dans la même logique d'étendre les propriétés des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, on a :

Theorem 5.13 (Formule de Taylor Young)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ une fonction deux fois dérivable et soit $a \in I$. On note $f^{(k)}(a) = (x^{(k)}(a), y^{(k)}(a)) \in \mathbb{R}^2$. Alors :*

$$f(t) = f(a) + (t-a) \cdot f'(a) + \frac{(t-a)^2}{2} \cdot f''(a) + \ldots + \frac{(t-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a) + (t-a)^n \cdot \varepsilon(t)$$

où $\varepsilon : I \to \mathbb{R}^2$ est une fonction telle que $\lim_{t\to a} \varepsilon(t) = (0,0)$.

Démonstration. Conséquence de la formule de Taylor–Young usuelle, écrite pour chaque fonction coordonnée. □

Exemple 5.14. Soit $f(t) = (t+\cos(t), t-\sin(t))$ avec $t \in \mathbb{R}$. On cherche le développement limité de f, d'ordre 3, donné par la formule de Taylor–Young.

On peut aussi écrire directement le développement limité de f (en fait, de chaque fonction coordonnée) en 0 :

$$\begin{aligned} f(t) &= (1 + t - \frac{t^2}{2} + t^3\varepsilon_1(t), \frac{t^3}{6} + t^3\varepsilon_2(t)) \\ &= (1,0) + t(1,0) + \frac{t^2}{2}(-1,0) + \frac{t^3}{6}(0,1) + t^3 \underbrace{(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))}_{\varepsilon(t)}. \end{aligned}$$

Par identification, $f(0) = (1,0)$, $f'(0) = (1,0)$, $f''(0) = (-1,0)$, $f^{(3)}(0) = (0,1)$.

5.6 Étude locale en un point (suite)

On peut maintenant étendre la construction de vecteurs tangents au cas des points singuliers.

Proposition 5.15. *Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ un arc paramétré de classe C^n, $a \in I$, et supposons qu'il existe $p \in \{1, \dots, n\}$ – que l'on choisit alors minimal – tel que $f^{(p)}(a) = (x^{(p)}(a), y^{(p)}(a)) \neq (0,0)$. Alors $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point M_a, de vecteur directeur $\vec{V_a} = x^{(p)}(a)\vec{\imath} + y^{(p)}(a)\vec{\jmath}$.*

Démonstration. On applique la formule de Taylor–Young qui donne :

$$f(t) = f(a) + \frac{(t-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + (t-a)^p \varepsilon(t), \quad \text{avec} \quad \lim_{t \to a} \varepsilon(t) = (0,0).$$

Cela entraîne que, pour tout $t \neq a$, le vecteur

$$(x^{(p)}(a) + p!\varepsilon_1(t))\vec{\imath} + (y^{(p)}(a) + p!\varepsilon_1(t))\vec{\jmath}$$

est un vecteur tangent à la droite $(M_a M_t)$. En faisant tendre t vers a, ce vecteur tend vers $\vec{V_a}$, qui est alors tangent à la courbe paramétrée au point M_a. □

Exemple 5.16. Si $f(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$ alors $f'(t) = (-3\sin(t)\cos^2(t), 3\cos(t)\sin^2(t))$ donc $f'(0) = (0,0)$. Pour déterminer un vecteur tangent, on calcule alors $f''(t) = (-3\cos^3(t) + 6\sin^2(t)\cos(t), -3\sin^3(t) + 6\cos^2(t)\sin(t))$ ainsi $f''(0) = (-3,0) \neq (0,0)$, et donc $\vec{V_0} = -3\vec{\imath}$ est vecteur tangent à la courbe au point $M_0(1,0)$.

En poursuivant le développement limité au delà du rang p, on peut avoir une information plus précise sur l'allure de la courbe au voisinage du point M_a. Avec p comme dans la proposition ci-dessus, on suppose qu'il existe $q \in \{p+1, \dots, n\}$ – que l'on choisit minimal – tel que $f^{(q)}(a)$ n'est pas colinéaire à $f^{(p)}(a)$ (en particulier il faut avoir $f^{(q)}(a) \neq (0,0)$ mais ce n'est pas suffisant en général).

On pose alors $\vec{W_a} = x^{(q)}(a)\vec{\imath} + y^{(q)}(a)\vec{\jmath}$, et on obtient deux vecteurs $\vec{V_a}, \vec{W_a}$ non colinéaires. On va travailler dans le repère $(M_a, \vec{V_a}, \vec{W_a})$.

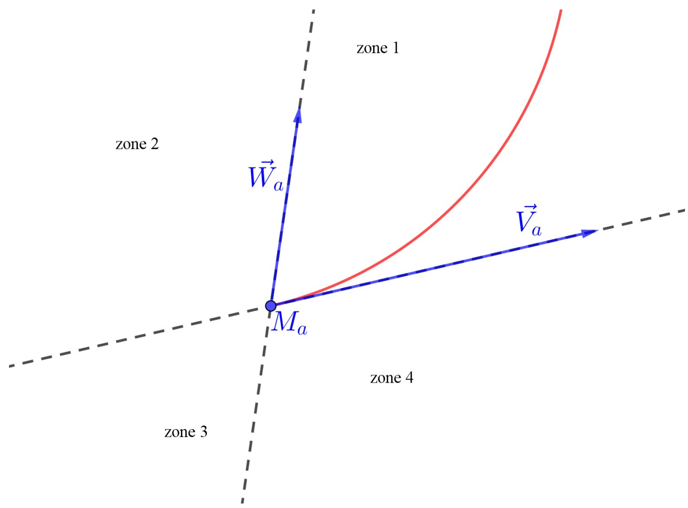
La formule de Taylor–Young donne :

$$f(t) = f(a) + \sum_{i=p}^{q-1} \frac{(t-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(t-a)^q}{q!} f^{(q)}(a) + (t-a)^q \varepsilon(t).$$

Cela entraîne que le vecteur $\overrightarrow{M_a M_t}$ peut s'écrire

$$\overrightarrow{M_a M_t} = X(t)\vec{V_a} + Y(t)\vec{W_a} \quad \text{où} \quad X(t) \sim_a \frac{(t-a)^p}{p!}, \quad Y(t) \sim_a \frac{(t-a)^q}{q!}.$$

Pour $t > a$ (c'est-à-dire après le passage au point M_a), on a $X(t) > 0$ et $Y(t) > 0$ donc le point M_t de la courbe est situé dans la partie du plan formé par les points de coordonnées positives dans le repère $(M_a, \vec{V_a}, \vec{W_a})$; de plus $\vec{V_a}$ est un vecteur tangent à la courbe.



Il y a en tout quatre parties du plan, suivant le signe des coordonnées dans le repère. Pour $t < a$ il y a quatre configurations possibles :

parité de p	parité de q	signe de $X(t)$ pour $t < a$	signe de $Y(t)$ pour $t < a$	zone de M_t pour $t < a$	type de point
impair	pair	< 0	> 0	zone 2	point ordinaire
impair	impair	< 0	< 0	zone 3	point d'inflexion
pair	impair	> 0	< 0	zone 4	rebroussement de 1ère espèce
pair	impair	> 0	> 0	zone 1	rebroussement de 2ème espèce

Exemple 5.17. (a) Soit $f(t) = (t, t^3)$ et étudions le type du point $M_0(0,0)$. On a $f'(t) = (1, 3t^2)$ donc $f'(0) = (1,0)$, $\vec{V_0} = \vec{\imath}$, et $p = 1$. Ensuite $f''(t) = (0, 6t)$ de sorte que $f''(0) = (0,0)$, enfin $f^{(3)}(0) = (0,6)$ non colinéaire à $(1,0)$, donc $\vec{W_0} = 6\vec{\jmath}$ et $q = 3$. Ainsi p et q sont impairs. Donc M_0 est un point d'inflexion de la courbe. Comme la courbe paramétrée associée à f coïncide en fait avec la courbe représentative de la fonction cube, on retrouve le fait que cette dernière a un point d'inflexion en l'origine.

(b) Soit $f(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$ comme dans l'exemple précédent. Reprenons cet exemple en cherchant un développement limité d'ordre 3 (au lieu de calculer les dérivées successives comme précédemment) :

$$\cos^3(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)\right)^3 = 1 - \frac{3}{2}t^2 + o(t^3)$$

et $\sin^3(t) = t^3 + o(t^3)$ (car $\sin(t) = t + o(t)$), donc

$$f(t) = (1,0) + \frac{t^2}{2}(-1,0) + \frac{t^3}{3!}(0,6) + t^3\varepsilon(t).$$

Cela entraîne : $p = 2$, $q = 3$, $\vec{V_0} = -\vec{\imath}$, $\vec{W_0} = 6\vec{\jmath}$, et $M_0(1,0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

6 Séries numériques à termes positifs

6.1 Généralités sur les séries

Définition 6.1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique. La *série numérique de terme général* u_n est la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{pour tout entier } n \geq 0.$$

On note cette série $\sum u_n$.

On appelle u_n le terme d'indice n et on appelle S_n la *somme partielle d'indice* n de la série $\sum u_n$.

En principe la suite (u_n) formant les termes de la série peut être une suite à valeurs réelles ou même complexes, mais dans ce cours on se limite au cas des séries à termes positifs : u_n est un réel positif ou nul, pour tout n.

Remarque 6.2. Si la suite (u_n) n'est définie qu'à partir du rang n_0, alors il en est de même de la série $\sum u_n$, et on a $S_n = u_{n_0} + \ldots + u_n$ pour tout $n \geq n_0$.

Par exemple, $\sum \frac{1}{n}$ est la série de terme général $\frac{1}{n}$, défini pour $n \geq 1$. Pour tout $n \geq 1$, la somme partielle de cette série est donnée par

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

La série $\sum \frac{1}{n}$ est appelée *série harmonique.*

Exemple 6.3. (a) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = n$ pour tout n. Alors la série $\sum n$ a pour somme partielle $S_n = 0 + 1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(b) Soit plus généralement $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de la forme $u_n = a + rn$ pour tout $n \geq 0$. Alors $\sum(a + rn)$ a pour somme partielle $S_n = a(n+1) + r\frac{n(n+1}{2}$.

(c) Soit q un réel positif différent de 1. La série $\sum q^n$ est appelée *série géométrique*. La somme partielle est $S_n = 1 + q + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Remarque 6.4. En général, il n'est pas possible de donner une formule explicite pour la somme partielle d'une série. Au delà des cas traités dans l'exemple ci-dessus, un autre cas où un tel calcul est possible est celui de "sommes télescopiques" comme dans l'exemple suivant.

Soit la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$. On remarque que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. La somme partielle peut alors se calculer ainsi :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

6.2 Séries convergentes

Définition 6.5. On dit qu'une série $\sum u_n$ est *convergente* si la somme partielle S_n admet une limite finie quand $n \to +\infty$. Lorsqu'il n'y a pas de limite finie, la série est dite *divergente*.

(On dit aussi que la série converge / diverge.)

Cette limite est alors appelée la *somme de la série* et on la note $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exemple 6.6. (a) La série $\sum n$ diverge, puisque $S_n = \frac{n(n+1)}{2} \to +\infty$.

(b) La série géométrique $\sum q^n$ est convergente si et seulement si $q \in [0, 1[$. La somme de la série est alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

(c) Au vu du calcul de somme partielle effectué dans la Remarque 6.4, la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente de somme égale à 1.

On remarque que, si $\sum u_n$ converge, autrement dit si S_n tend vers une limite finie ℓ, alors S_{n-1} tend aussi vers ℓ. Il résulte que $u_n = S_n - S_{n-1}$ tend vers 0 :

Proposition 6.7 (Condition nécessaire de convergence)**.** *Si la série $\sum u_n$ converge, alors son terme général u_n tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.*

Lorsque u_n ne tend pas vers 0, on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement. Par exemple la série $\sum n$ diverge grossièrement.

Cette condition nécessaire n'est pas suffisante, comme l'indique l'exemple suivant :

Exemple 6.8. On considère la série $\sum \ln \frac{n+1}{n}$. On observe que $\ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln(n)$ de sorte que la somme partielle se calcule (via une somme télescopique) :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1) \to +\infty \text{ si } n \to +\infty$$

Ainsi la série diverge. Pourtant $\ln \frac{n+1}{n} \to 0$ si $n \to +\infty$.

Dans le cas qui nous intéresse des séries à termes positifs, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 0}$ est croissante, puisque $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ pour tout n. Comme $(S_n)_{n\geq 0}$ est croissante, elle a une limite, qui peut être $+\infty$ ou un réel positif. Le second cas se produit si et seulement si (S_n) est majorée :

Proposition 6.9. *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (S_n) des sommes partielles est majorée.*

6.3 Critères de comparaison

Dans cette section, on suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs. On note par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ leurs sommes partielles respectives.

On a d'abord clairement :

Proposition 6.10. (a) *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(u_n + v_n)$ converge, et $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.*

(b) *Si $\sum u_n$ converge et λ est un réel alors $\sum(\lambda u_n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

On souhaite maintenant des résultats permettant de comparer la convergence des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Proposition 6.11. *Si $u_n \leq v_n$ pour tout entier $n \geq 0$, ou au moins pour tout entier n à partir d'un certain rang n_0, alors :*

$$\begin{aligned} \textstyle\sum v_n \text{ converge} \quad &\Rightarrow \quad \textstyle\sum u_n \text{ converge,} \\ \textstyle\sum u_n \text{ diverge} \quad &\Rightarrow \quad \textstyle\sum v_n \text{ diverge.} \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de montrer la première implication, puisque la seconde en est la contraposée. Supposons que $\sum v_n$ converge. La somme partielle (T_n) est alors majorée : il existe $M > 0$ tel que $T_n \leq M$ pour tout entier n. En utilisant l'hypothèse on a :

$$\forall n \geq 0, \quad S_n \leq u_0 + \ldots + u_{n_0-1} + T_n \leq u_0 + \ldots + u_{n_0-1} + M.$$

Ainsi (S_n) est majorée et donc $\sum u_n$ converge. □

Exemple 6.12. La série $\sum \frac{1}{n2^n}$ est convergente, puisqu'on a $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \geq 1$, et on sait que la série $\sum \frac{1}{2^n}$ converge.

On généralise l'énoncé précédent au travers de la relation de prépondérance : on note $u_n = O(v_n)$ s'il existe un rang n_0 et un réel positif M tels que $|u_n| \leq M|v_n|$ pour tout $n \geq n_0$ – ou en fait $u_n \leq M v_n$ pour des suites à termes positifs. Lorsque $v_n \neq 0$ pour tout n, la relation $u_n = O(v_n)$ revient à dire que la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ est bornée.

Si $u_n = o(v_n)$ ou $u_n \sim v_n$ alors on a en particulier $u_n = O(v_n)$. En combinant les deux propositions précédentes, on obtient alors :

Proposition 6.13. (a) *Supposons $u_n = O(v_n)$. Alors :*

$$\begin{aligned} \textstyle\sum v_n \text{ converge} \quad &\Rightarrow \quad \textstyle\sum u_n \text{ converge,} \\ \textstyle\sum u_n \text{ diverge} \quad &\Rightarrow \quad \textstyle\sum v_n \text{ diverge.} \end{aligned}$$

Ces implications ont donc lieu a fortiori si $u_n = o(v_n)$.

(b) *Supposons $u_n \sim v_n$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

Exemple 6.14. (a) On a $\ln \frac{n+1}{n} = \ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$. Or nous avons vu que la série $\sum \ln \frac{n+1}{n}$ diverge. Donc la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

(b) On a $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$, or nous avons vu que la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge, donc la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.

(c) Par conséquent la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sera divergente pour tout $\alpha < 1$ (car on a alors $\frac{1}{n} = o(\frac{1}{n^\alpha})$) et convergente pour tout $\alpha > 2$ (car alors $\frac{1}{n^\alpha} = o(\frac{1}{n^2})$).

6.4 Séries de Riemann

On complète l'exemple précédent :

Proposition 6.15 (Séries de Riemann)**.** *Soit $\alpha > 0$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.*

La démonstration s'appuie sur le critère suivant de comparaison série/intégrale.

Proposition 6.16. *Soit $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction continue, décroissante. La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_1^n f(x)\,dx$ a une limite finie lorsque $n \to +\infty$.*

Démonstration. La suite $(\int_1^n f(x)\,dx)$ est croissante. Il suffit donc de montrer :

$$(*) \qquad (S_n) \text{ est majorée} \quad \Leftrightarrow \quad (\textstyle\int_1^n f(x)\,dx) \text{ est majorée}$$

où S_n note la somme partielle d'indice n de la série $\sum f(n)$.

Observons d'abord que, comme f est décroissante, pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$\forall x \in [k, k+1], \quad f(k+1) \leq f(x) \leq f(k).$$

Cela entraîne

$$\forall k \geq 1, \quad f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k).$$

En sommant cette relation pour k variant de 1 à n, on obtient alors

$$S_{n+1} - f(1) = f(2) + \ldots + f(n+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq f(1) + \ldots + f(n) = S_n.$$

D'où $(*)$. □

Démonstration de la Proposition 6.15. On applique la proposition précédente à la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$, qui est décroissante (car $\alpha > 0$). La convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est donc équivalente à la convergente de la suite $(\int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,dx)$. Or si $\alpha > 1$ on a

$$\int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \Big[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big]_1^n = \frac{n^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \to \frac{1}{\alpha-1} \in \mathbb{R}.$$

Donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge lorsque $\alpha > 1$. On a déjà vu que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge si $\alpha \leq 1$. □

6.5 Critères de d'Alembert et de Cauchy

Proposition 6.17 (Critère de d'Alembert)**.** *Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs (au moins à partir d'un certain rang).*
On suppose que la limite $\ell := \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \in [0,+\infty]$ existe.
(a) *Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge.*
(b) *Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.*
(c) *Si $\ell = 1$, alors... on ne peut rien dire.*

Démonstration. (a) On fixe q tel que $\ell < q < 1$. Il existe alors un rang n_0 tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$ pour tout $n \geq n_0$. Alors $u_n \leq u_{n_0} q^{n-n_0}$ pour tout $n \geq n_0$, d'où il résulte que la série $\sum u_n$ converge puisque la série géométrique $\sum q^n$ converge.

(b) On fixe $q \in]1, \ell[$ et il existe alors un rang n_0 tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq q$ pour tout $n \geq n_0$. D'où $u_n \geq u_{n_0} q^{n-n_0}$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui entraîne $u_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, de sorte que $\sum u_n$ diverge grossièrement. □

Exemple 6.18. Considérons la série $\sum u_n$ de terme général $u_n = \frac{n^2}{n!}$ pour $n \geq 0$. On calcule

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2} = \frac{1}{n+1} \times \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^2 \to 0.$$

Par le critère de d'Alembert, la série $\sum u_n$ est convergente.

De manière assez analogue à la règle de d'Alembert, on a :

Proposition 6.19 (Règle de Cauchy)**.** *Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs (au moins à partir d'un certain rang).*
On suppose que la limite $\ell := \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} \in [0,+\infty]$ existe.
(a) *Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge.*
(b) *Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.*
(c) *Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.*

Exemple 6.20. Soit $\sum u_n$ la série de terme général $u_n = \frac{n^2}{2^n}$. On a $\sqrt[n]{u_n} = n^{\frac{2}{n}} \times \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$. Or $n^{\frac{2}{n}} = \exp(\frac{2}{n} \ln n) \to \exp(0) = 1$ par croissance comparée, donc $\lim \sqrt[n]{u_n} \to \frac{1}{2} < 1$ ce qui, d'après le critère de Cauchy, entraîne que $\sum u_n$ converge.